Ministère de l'Éducation Nationale
Centre National des Examens et Concours de l'Éducation
EXAMEN : Baccalauréat Général
Série: Terminale Sciences Exactes (**TSE**) et Sciences et Technologie Industrielle (**STI**)
Épreuve: Mathématiques

République du Mali
Un Peuple-Un But-Une Foi
BAC 2023
SESSION : Juin 2023

Durée: 4 heures

Coefficient: 4

Exercice 1 .... 5 pts

I. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u},\vec{v})$, on donne les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 2+2i$ et $z_B = \left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(3+\sqrt{3}\right)$.

1. Ecris le nombre complexe $\frac{z_A}{z_B}$ sous sa forme algébrique.

2. a. Calcule les distances OA et AB.

   b. Compare $4+2\sqrt{3}$ et $\left(1+\sqrt{3}\right)^2$ puis calcule la distance OB.

   c. Détermine en radian, la mesure principale de $\left(\vec{u},\overrightarrow{OA}\right)$ puis celle de $\left(\vec{u},\overrightarrow{OB}\right)$. Déduis-en une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

3. En utilisant les questions précédentes, donne les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

4. a. Détermine l'affixe du point D image de A par la rotation de centre O et d'angle $\alpha = 2\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$.

   b. Quelle est la nature du quadrilatère $OABD$? Justifie ta réponse.

Pour la construction de la figure, prends $\sqrt{3} \simeq 1,7$.

II. A l' occasion d'une fête, le gouvernement a renoncé à certaines taxes sur le bétail. Un marchand d'oviné, ayant bénéficié de la subvention, a vendu tous ses animaux (des moutons et des chèvres) faisant ainsi une recette de 1000000 de CFA. Chaque mouton coutait 80000 CFA tandis que la chèvre faisait 50000 CFA. Sachant que le marchand avait plus de chèvres que de moutons, détermine le nombre de moutons et le nombre de chèvres qu'avait vendu ce marchand.

Exercice 2 .... 5 pts

On considère dans le plan, un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 2a$ et $AC = a$ où a est un réel strictement positif donné.

1. a. Détermine et construis le barycentre G des points pondérés $(A,1)$; $(B,-1)$ et $(C,1)$.

   b. Détermine et construis l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que : $\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$.

2. Soit H le point du plan défini par : $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

a. Démontre que le point H est le barycentre des points pondérés $(A,3)$; $(B,1)$ et $(C,-2)$.

b. Pour tout réel k , on désigne par E_k l'ensemble des points M du plan tels que : $3MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = ka^2$. Pour quelle valeur de k , E_k contient-il le point C ?

c. Détermine et construis l'ensemble (Γ') des points M du plan tels que : $3MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = 8a^2$.

Problème .... 10 pts

A. La fonction numérique f de la variable réelle x, est définie sur IR_+^* par $f : x \mapsto f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln x$.

1. a. Calcule les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

b. Etudie le sens de variations de f puis dresse son tableau de variations.

2. a. Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet dans IR_+^* une solution unique l et $l \in]1, 2[$.

b. Etudie le signe de $f(x)$ lorsque x décrit IR_+^*.

B. On se propose dans cette partie de calculer une valeur approchée de l à 10^{-2} près.

1. Soit φ la fonction définie sur $[1, 2]$ par $\varphi : x \mapsto \varphi(x) = 2 - \frac{1}{2}\ln x$.

a. Etudie les variations de φ. Prouve que l'image par φ de l'intervalle $[1, 2]$ est un intervalle contenu dans $[1, 2]$.

b. Montre que l est l'unique solution de l'équation : $\varphi(x) = x$.

2. On considère alors la suite u définie sur IN : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \varphi(u_n), \forall n \in IN \end{cases}$.

a. Démontre que, pour tout entier naturel n, on a : $1 \leq u_n \leq 2$.

b. Prouve que, pour tout nombre réel x de $[1, 2]$, on a : $|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

c. Déduis-en que, pour tout entier naturel n, on a : $|u_{n+1} - l| \leq \frac{1}{2}|u_n - l|$.

d. Montre que la suite u converge vers l.

e. Détermine un entier naturel n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée à 10^{-2} près de l.

Donne un encadrement de u_{n_0} d'amplitude 10^{-2}.

C. La fonction g est définie sur $[0,1]$ par : $\begin{cases} g(0)=0 \\ g(x)=-\dfrac{7}{8}x^2+x-\dfrac{1}{4}x^2\ln x \quad pour\ 0 \prec x \leq 1 \end{cases}$.

a. Etudie la dérivabilité de g en 0.

b. Calcule $g'(x)$ pour $x \neq 0$ puis vérifie que $g'(x)=xf\left(\dfrac{1}{x}\right)$ $pour\ 0 \prec x \leq 1$.

c. Déduis-en le signe de $g'(x)$ lorsque x décrit $]0,1]$.

Dresse le tableau de variations de la fonction g.

D. Dans cette partie l'objectif est le tracé de la courbe représentative (C) de la fonction g dans un plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{i},\vec{j})$, unité graphique $10\ cm$.

1. a. Montre qu'une équation de la tangente (d) à la courbe (C) de g en son point d'abscisse nulle est $y=x$.

b. Détermine les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C) et de la droite (d).

c. Etudie la position relative de (C) et (d).

d. Soit α la fonction définie sur $\left[0,e^{-\frac{7}{2}}\right]$ par $\alpha(x)=g(x)-x$.

Etudie le sens de variations de la fonction α et déduis-en que pour tout réel x de l'intervalle $\left[0,e^{-\frac{7}{2}}\right]$ on a : $0 \leq \alpha(x) \leq 5.10^{-5}$.

Sachant que l'épaisseur d'un trait de crayon est de l'ordre du dixième de millimètre, est-il possible de distinguer, sur l'intervalle $\left[0,e^{-\frac{7}{2}}\right]$ la courbe (C) et la droite (d) ?

2. Soit (Γ) la courbe représentative de la fonction β définie sur $[0,1]$ par : $\beta(x)=-\dfrac{7}{8}x^2+x$.

a. Montre que la droite (d) est la tangente à la courbe (Γ) en son point d'abscisse nulle.

b. Etudie la position relative de (C) et de (Γ).

c. Trace, sur un même graphique (d), (Γ) et (C).

Exercice 1 : .... *5 points*

I. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonomé $\left(O\,;\,\vec{u}\,,\,\vec{v}\right)$. On donne les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 2 + 2i$ et $z_B = \left(1+\sqrt{3}\right) + i\left(3+\sqrt{3}\right)$.

1. Écrivons le nombre complexe $\frac{z_A}{z_B}$ sous sa forme algébrique :

Méthode 1:

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{2+2i}{\left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(3+\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{(2+2i)\left[\left(1+\sqrt{3}\right)-i\left(3+\sqrt{3}\right)\right]}{\left(1+\sqrt{3}\right)^2+\left(3+\sqrt{3}\right)^2}$$

$$= \frac{2\left(1+\sqrt{3}\right)+2\left(3+\sqrt{3}\right)+i\left[2\left(1+\sqrt{3}\right)-2\left(3+\sqrt{3}\right)\right]}{1+2\sqrt{3}+3+9+6\sqrt{3}+3}$$

$$= \frac{8+4\sqrt{3}+i(-4)}{16+8\sqrt{3}} = \frac{4\left(2+\sqrt{3}\right)-4i}{8\left(2+\sqrt{3}\right)} = \frac{2+\sqrt{3}-i}{2\left(2+\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left[\left(2+\sqrt{3}\right)-i\right]}{2\left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)} = \frac{\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)-i\left(2-\sqrt{3}\right)}{2(4-3)}$$

$$= \frac{4-3+i\left(\sqrt{3}-2\right)}{2} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}-2}{2}i$$

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}-2}{2}i$$

Méthode 2 :

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{2+2i}{\left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(3+\sqrt{3}\right)} = \frac{2(1+i)}{\left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(\sqrt{3}^2+\sqrt{3}\right)}$$

$$= \frac{2(1+i)}{\left(1+\sqrt{3}\right)+i\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)} = \frac{2}{1+\sqrt{3}}\times\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\left(1-\sqrt{3}\right)}{1^2-\sqrt{3}^2}\times\frac{(1+i)\left(1-i\sqrt{3}\right)}{1^2+\sqrt{3}^2} = \frac{-\left(1-\sqrt{3}\right)}{4}\left[\left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(1-\sqrt{3}\right)\right]$$

$$= \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(1+\sqrt{3}\right)}{4} - i\frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{4} = \frac{3-1}{4} - i\frac{3-2\sqrt{3}+1}{4} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}-2}{2}i$$

$$\frac{z_A}{z_B} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}-2}{2}i$$

2. **a.** Calculons les distances OA et AB.

$OA = \left| z_A - z_O \right| = \left| z_A \right| = 2\left|1 + i\right| = 2\sqrt{2}$

$AB = \left| z_B - z_A \right| = \left|1 + \sqrt{3} + i\left(3 + \sqrt{3}\right) - 2 - 2i\right|$

$= \left|-1 + \sqrt{3} + i\left(1 + \sqrt{3}\right)\right| = \sqrt{\left(-1 + \sqrt{3}\right)^2 + \left(1 + \sqrt{3}\right)^2}$

$= 2\sqrt{2}$

$OA = AB = 2\sqrt{2}$.

b. Comparons $4 + 2\sqrt{3}$ et $\left(1 + \sqrt{3}\right)^2$

$\left(1 + \sqrt{3}\right)^2 = 1 + 2\sqrt{3} + 3 = 4 + 2\sqrt{3}$ d'où $\left(1 + \sqrt{3}\right)^2 = 4 + 2\sqrt{3}$.

Calculons la distance OB.

$OB = \left| z_B - z_O \right| = \left| z_B \right| = \left|\left(1 + \sqrt{3}\right) + i\left(3 + \sqrt{3}\right)\right|$

$= \sqrt{\left(1 + \sqrt{3}\right)^2 + \left(3 + \sqrt{3}\right)^2}$

$= 2 + 2\sqrt{3}$

c. Déterminons en radian, la mesure principale de $\left(\widehat{\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{OA}}\right)$ puis celle de

$\left(\widehat{\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{OB}}\right)$

$Z_B = 1 + \sqrt{3} + i\,(3 + \sqrt{3}\,)$

$mes\left(\widehat{\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OB}}\right) = Arg\,(Z_B\,)$

Soit θ un argument de Z_B ; on a :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1 + \sqrt{3}}{2\,(1 + \sqrt{3}\,)} = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{3 + \sqrt{3}}{2\,(1 + \sqrt{3}\,)} = \dfrac{\sqrt{3}\,(1 + \sqrt{3}\,)}{2\,(1 + \sqrt{3}\,)} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$mes\left(\widehat{\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OB}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

$Z_A = 2 + 2i$

$mes\left(\widehat{\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OA}}\right) = Arg\left(Z_A\right)$

Soit α un argument de Z_A on a :

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} \\ \sin\alpha = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$mes\left(\widehat{\vec{u}\ ;\ \overrightarrow{OA}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

Autre méthode

$$mes\left(\widehat{\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{OA}}\right) = Arg(z_A) = Arg(2(1+i)) = Arg(2) + Arg(1+i) = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned} mes\left(\widehat{\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{OB}}\right) = Arg(z_B) &= Arg\left[\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)\right] \\ &= Arg\left(1+\sqrt{3}\right) + Arg\left(1+i\sqrt{3}\right) = 0 + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Déduisons - en une mesure en radians de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)$.

Méthode 1

$$\begin{aligned} mes\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) &= mes\left(\widehat{\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{OB}}\right) - mes\left(\widehat{\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{OA}}\right) \\ &= mes\left(\widehat{\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{OB}}\right) - mes\left(\widehat{\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{OA}}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \boldsymbol{\frac{\pi}{12}} \end{aligned}$$

Méthode 2

$$\begin{aligned} mes\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) &= Arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = Arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) \\ &= Arg(z_B) - Arg(z_A) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \boldsymbol{\frac{\pi}{12}}. \end{aligned}$$

3. En utilisant les questions précédentes, donnons les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Mettons $\frac{z_B}{z_A}$ sous la forme trigonométrique et algébrique :

Méthode 1:

On sait que :

$\frac{z_A}{z_B} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}-2}{2}i$ donc $\left|\frac{z_A}{z_B}\right| = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ et $arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = -arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = -\frac{\pi}{12}$

$$\frac{z_A}{z_B}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$$

$$\begin{cases}\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}\\ \sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\frac{\sqrt{3}-2}{2}}{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\\ \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{cases}$$

Méthode 2

$\left|\frac{z_B}{z_A}\right|=\frac{2+2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$ alors sa formule trigonométrique est :

$$\frac{z_B}{z_A}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right).$$

$$\frac{z_B}{z_A}=\frac{1}{\frac{z_A}{z_B}}=\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}-2}{2}i}=\frac{2}{1+\left(\sqrt{3}-2\right)i}=\frac{2\left(1-\left(\sqrt{3}-2\right)i\right)}{1+\left(\sqrt{3}-2\right)^2}$$

$$=\frac{2\left(1-\left(\sqrt{3}-2\right)i\right)}{1+3-4\sqrt{3}+4}$$

$$=\frac{2\left(1-\left(\sqrt{3}-2\right)i\right)}{8-4\sqrt{3}}$$

$$=\frac{2\left(1-\left(\sqrt{3}-2\right)i\right)}{4\left(2-\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{1-\left(\sqrt{3}-2\right)i}{2\left(2-\sqrt{3}\right)}=\frac{\left(\sqrt{3}+2\right)\left[1-\left(\sqrt{3}-2\right)i\right]}{2\left(2-\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{3}\right)}$$

$$=\frac{2+\sqrt{3}-i\left(\sqrt{3}-2\right)\left(\sqrt{3}+2\right)}{2(4-3)}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$$

Sa forme algébrique est : $\frac{z_B}{z_A}=\frac{2+\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$.

Par identification on a :

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

4. **a.** Déterminons l'affixe du point D image de A par la rotation de centre O et d'angle α.

$$z_D=e^{i\alpha}z_A=e^{i\frac{\pi}{6}}(2+2i)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)(2+2i)$$

$$=\left(\sqrt{3}+i\right)(1+i)=\sqrt{3}-1+i\left(1+\sqrt{3}\right)$$

$$z_D=\sqrt{3}-1+i\left(1+\sqrt{3}\right)$$

b. La nature du quadrilatère $OABD$.

Méthode 1

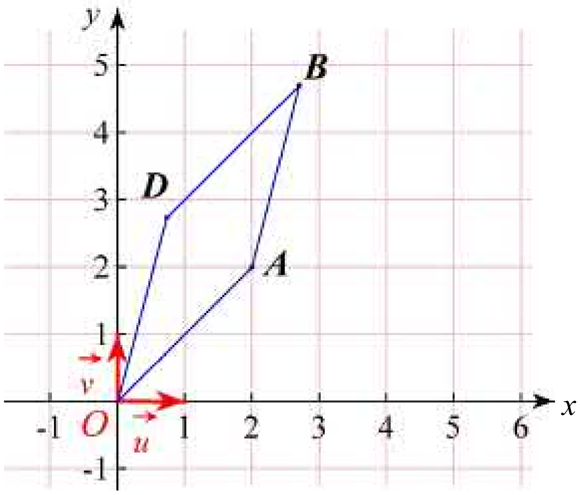
D est l'mage de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ alors $OA=OD$ or

$OA=AB=2\sqrt{2}$; $BD=\left|z_D-z_B\right|=\left|-2-2i\right|=2\sqrt{2}$ d'où

$OA=AB=OD=BD$

En conclusion $OABD$ est un losange.

Méthode 2



$OABD$ est un losange.

Justification :

$OA=AB=2\sqrt{2}$ et D est l'mage de A par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$

alors $OA=OD$

$$Arg\left(\frac{z_B - z_O}{z_A - z_D}\right) = Arg\left(\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(3+\sqrt{3}\right)}{2+2i-\sqrt{3}+1-i\left(1+\sqrt{3}\right)}\right)$$

$$= Arg\left(\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(3+\sqrt{3}\right)}{3-\sqrt{3}+i\left(1-\sqrt{3}\right)}\right)$$

$$= Arg\left(\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}^2-\sqrt{3}-i\left(\sqrt{3}-1\right)}\right)$$

$$= Arg\left(\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-1\right)-i\left(\sqrt{3}-1\right)}\right)$$

$$= Arg\left(\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}\right)$$

$$= Arg\left(\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(-i^2+i\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}\right)$$

$$= Arg\left(\frac{i\left(1+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}\right) = Arg\left(\frac{i\left(1+\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{3}-1\right)}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Alors ses diagonales sont perpendiculaires.

$$\frac{z_D + z_A}{2} = \frac{\sqrt{3}-1+i\left(1+\sqrt{3}\right)+2+2i}{2} = \frac{1+\sqrt{3}+i\left(3+\sqrt{3}\right)}{2} = \frac{z_B + z_O}{2}.$$

Les diagonales se coupent en leur milieu. D'où $OABD$ est un losange.

Méthode 3

$\overrightarrow{OD}\begin{pmatrix}\sqrt{3}-1\\ 1+\sqrt{3}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}\sqrt{3}-1\\ 1+\sqrt{3}\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB} \Longrightarrow OABD$ est un parallélogramme

$$\begin{cases} OABD \text{ est un parallélogramme} \\ OA = AB = 2\sqrt{2} \end{cases} \Longrightarrow OABD \text{ est un losange.}$$

II. D'après l'énoncé on a :

$80\,000\ FCFA =$ prix d'un mouton

$50\,000\ FCFA =$ prix d'une chèvre.

Soient x et y les nombres respectifs de moutons et de chèvres et $x < y$ avec $x, y \in \mathbb{N}^*$

Déterminons le nombre de moutons et de chèvres :

$80\,000x + 50\,000y = 1\,000\,000 \Leftrightarrow 8x + 5y = 100.$

$8 \wedge 5 = 1$ alors l'équation $8x + 5y = 100$ admet des solutions entières.

Méthode 1 : Congruence

$8x + 5y = 100 \Longrightarrow 5y = 100 - 8x \Longrightarrow 5y \equiv 100[8] \Longrightarrow y \equiv 4[8] \Longrightarrow y = 8k + 4$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Remplaçons y par sa valeur dans l'équation :

$8x+5(8k+4)=100 \Leftrightarrow 8x+40k=80 \Rightarrow x=10-5k.$

Comme : $\begin{cases} x<y \\ x\geq 1 \\ y\geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10-5k<8k+4 \\ 10-5k\geq 1 \\ 8k+4\geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -13k<-6 \\ -5k\geq -9 \\ 8k\geq -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k>\dfrac{6}{13} \\ k\leq \dfrac{9}{5} \\ k\geq \dfrac{-3}{8} \end{cases} \Rightarrow k=1$

alors $x=5$ et $y=12$.

Méthode 2: Algorithme d'Euclide

$8x+5y=100$

q	1	1	1	2
8	5	3	2	1
r	3	2	1	0

Posons $a=8$, $b=5$

$1=3\times 1-2$

$2=5\times 1-3=b-3$

$3=8\times 1-5=a-b$

$1=a-b-(b-3)=a-2b+a-b=2a-3b$

Donc $8(2)+5(-3)=1 \Rightarrow 8(200)+5(-300)=100$ alors $(200\ ;\ -300)$ est une solution particulière

On a le système :

$$\begin{cases} 8x+5y=100 \\ 8(200)+5(-300)=100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x \quad + \quad 5y \quad =100 \\ \underline{8(-200)-5(-300)=-100} \end{cases}$$

$$8(x-200)\ -5(-y-300)=0.$$

$8(x-200)=5(-y-300)$, $8 / 5(-y-300)$ et $8\wedge 5=1$ d'après Gauss $8 / -y-300$

$\exists \mathrm{k}\in\mathbb{Z}/\ -y-300=8k \Rightarrow y=-8k-300$;

$8(x-200)=5(-y-300) \Rightarrow 8(x-200)=5(8k) \Rightarrow x-200=5k$

$\Rightarrow\ x=5k+200$

alors $x=5k+200$ et $y=-8k-300$.

comme : $\begin{cases} x<y \\ x\geq 1 \\ y\geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5k+200<-8k-300 \\ 5k+200\geq 1 \\ -8k-300\geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13k<-500 \\ 5k\geq -199 \\ -8k\geq 300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k<\dfrac{-500}{13} \\ k\geq \dfrac{-199}{5} \\ k\leq \dfrac{300}{8} \end{cases}$

$\Rightarrow k=-39$

Alors $x=5(-39)+200=5$ et $y=-8(-39)-300=12$.

$x=5$ et $y=12$

Méthode 3: Équation homogène.

On constate que : le couple $(10\,;4)$ et une solution particulière de l'équation $8x+5y=100$.
L'équation homogène associée : $8x_0+5y_0=0 \Longrightarrow 8x_0=-5y_0 \Longrightarrow x_0=-5k$ et $y_0=8k$.
Alors $x=10+x_0=10-5k$ et $y=4+y_0=4+8k$.

Comme : $\begin{cases} x<y \\ x\geq 1 \\ y\geq 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 10-5k<8k+4 \\ 10-5k\geq 1 \\ 8k+4\geq 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -13k<-6 \\ -5k\geq -9 \\ 8k\geq -3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} k>\dfrac{6}{13} \\ k\leq \dfrac{9}{5} \\ k\geq \dfrac{-3}{8} \end{cases} \Longrightarrow k=1$

alors $x=5$ et $y=12$.

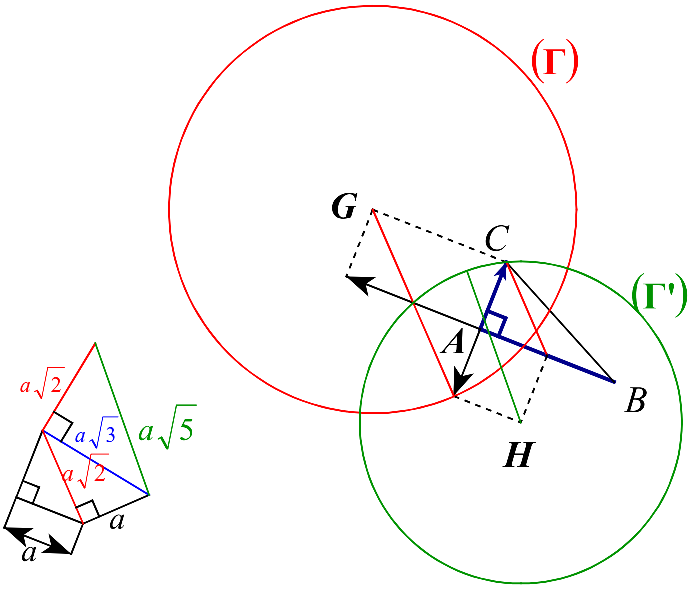
Exercice 2 : .... 5 points

D'après l'énoncé, ABC un triangle rectangle en A tel que $AB=2a$, $AC=a$ $(a>0)$.

1. **a.** Déterminons et construisons le barycentre G, des points pondérés $(A,1)$, $(B,-1)$ et $(C,1)$.

$G=bar\{(A,1);\,(B,-1);\,(C,1)\} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{AG}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

ou $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{BC}$



b. Déterminons et construisons l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que :

Méthode 1

$$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$$
$$\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\right\|$$
$$\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\sqrt{AB^2+4AC^2-4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}\quad (\text{avec } \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0)$$
$$\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\sqrt{4a^2+4a^2}=\sqrt{8a^2}=2a\sqrt{2}$$

Alors l'ensemble (Γ) est le cercle de centre G et rayon $2a\sqrt{2}$.

Méthode 2

Déterminons et construisons l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que :

$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$

Soit I le milieu du segment $[AB]$.

$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$

$\left\|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}-2\overrightarrow{MI}-2\overrightarrow{IC}\right\|$

$\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|-2\overrightarrow{IC}\right\|\Leftrightarrow\left\|\overrightarrow{MG}\right\|^2=4\times\left\|\overrightarrow{IC}\right\|^2$

D'après le théorème des médianes et pythagore on a :

$$2IC^2=AC^2+BC^2-\frac{AB^2}{2}$$

$$=AC^2+AB^2+AC^2-\frac{AB^2}{2}$$

$$=2AC^2+\frac{AB^2}{2}=2a^2+\frac{4a^2}{2}=4a^2 \Longrightarrow IC^2=2a^2.\ D'où :$$

$\left\|\overrightarrow{MG}\right\|^2=4\times 2a^2\Longrightarrow\left\|\overrightarrow{MG}\right\|=2a\sqrt{2}.$

Alors l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon $2a\sqrt{2}$

2. Soit H le point du plan défini par : $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$

a. Démontrons que H est le barycentre des points pondérés $(A,3)$; $(B,1)$; $(C,-2)$.

$\overrightarrow{AH}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -2\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{HB}+2\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HC}\right)=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{HA}-\overrightarrow{HB}+2\overrightarrow{HC}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}-2\overrightarrow{HC}=\vec{0}$$

alors $H=bar\{(A,3);(B,1);(C,-2)\}$.

b. Pour tout réel k, on designe par E_k l'ensemble des points M tels que :

$3MA^2+MB^2-2MC^2=ka^2$.

La valeur de k pour que $C\in E_k$.

$C\in E_k\Longrightarrow 3CA^2+CB^2=ka^2$

$$\Longrightarrow 3CA^2+CA^2+AB^2=ka^2\Longrightarrow 3a^2+a^2+4a^2=ka^2\Longrightarrow k=8$$

c. Déterminons et construisons l'ensemble (Γ') des points M tels que

$3MA^2+MB^2-2MC^2=8a^2$.

Posons $f(M)=3MA^2+MB^2-2MC^2$

$$f(M)=(3+1-2)MH^2+f(H)=2MH^2+f(H)$$

$$f(H)=\frac{3AB^2-6AC^2-2BC^2}{3+1-2}=\frac{3(2a)^2-6(a)^2-2\left((2a)^2+a^2\right)}{2}=-2a^2$$

$$f(M)=2MH^2-2a^2$$

$$2MH^2-2a^2=8a^2 \Longrightarrow MH=a\sqrt{5}$$

Alors (Γ') est le cercle de centre H et de rayon $a\sqrt{5}$ ou (Γ') est le cercle de centre H et passant par C.

Problème : .... 10 points

A. $f(x)=x-2+\frac{1}{2}\ln x$ et $D_f=\mathbb{R}_+^*=]0\,;+\infty[$.

1. **a.** Calculons les limites aux bornes de son ensemble de définition :

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(x-2+\frac{1}{2}\ln x\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\left(x-2+\frac{1}{2}\ln x\right)=+\infty$$

b. Étudions le sens de variations de f, puis dressons son tableau de variation :

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f'(x)=1+\frac{1}{2x}=\frac{2x+1}{2x}>0$, pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$,

alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Tableau de variation de f.

x	0	ℓ	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	0	$+\infty$

2. **a.** Démontrons que l'équation $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}_+^*$ une solution unique ℓ et $\ell\in]1,2[$.

f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers $f(\mathbb{R}_+^*)=\mathbb{R}$, de plus $0\in\mathbb{R}$ alors l'équation $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}_+^*$ une solution unique ℓ.

$f(1)=-1$; $f(2)=\frac{1}{2}\ln 2=0{,}346$; $f(1)\times f(2)<0$ d'après le théorème des valeurs interm*édiaires* $\ell\in]1,2[$.

b. Étudions le signe de f lorsque x décrit $\mathbb{R}_+^*$.

D'après le tableau de variation de f

Pour tout $x \in \left]0\,,\ell\right[$, $f(x) < 0$

Pour tout $x \in \left]\ell,+\infty\right[$, $f(x) > 0$

Pour $x = \ell$, $f(x) = 0$

B. On se propose dans cette partie de calculer une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près.

1. Soit φ la fonction définie sur $[1\,;2]$ par $\varphi(x) = 2 - \dfrac{1}{2}\ln x$.

a.
- Étudions les variations de φ.
  Dérivée et signe de $\varphi'(x)$.
  $\varphi'(x) = -\dfrac{1}{2x} < 0$ pour tout $x \in [1\,;2]$.
  Pour tout $x \in [1\,;2]$ $\varphi'(x) < 0$ alors φ est strictement décroissante sur $[1\,;2]$.
- Prouvons que l'image par φ de l'intervalle $[1\,;2]$ est un intervalle contenu dans $[1\,;2]$.
  On a : $1 \le x \le 2$ et φ étant continue et strictectemnt décroissante sur $[1\,;2]$
  $\Rightarrow \varphi(2) \le \varphi(x) \le \varphi(1) \Rightarrow 1{,}66 \le \varphi(x) \le 2 \Rightarrow 1 \le 1{,}66 \le \varphi(x) \le 2$ d'où $\varphi([1\,;2]) \subset [1;2]$.

b. Montrons que ℓ est l'unique solution de $\varphi(x) = x$.

On sait qu'il existe une unique solution ℓ de l'intervalle $]1\,;2[$ tel que $f(\ell) = 0$

$$f(\ell) = 0 \Leftrightarrow \ell - 2 + \frac{1}{2}\ln\ell = 0 \Leftrightarrow -2 + \frac{1}{2}\ln\ell = -l \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2}\ln\ell = \ell$$

Ce qui équivaut à $\varphi(\ell) = \ell$, ℓ est donc la seule solution de l'équation $\varphi(x) = x$.

2. On considère alors la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \varphi(u_n),\ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

a. Démontrons pour tout n, on a : $1 \le u_n \le 2$.

Raisonnons par récurrence :
- Pour $n = 0$, $u_0 = 1 \in [1\,;2]$
- Supposons que $\forall n \in \mathbb{N};\ u_n \in [1\,;2]$ et montrons que $u_{n+1} \in [1\,;2]$.
  $u_n \in [1\,;2] \Leftrightarrow 1 \le u_n \le 2 \Rightarrow \varphi(2) \le \varphi(u_n) \le \varphi(1)$ car φ est une fonction strictement décrossante sur $[1\,;2]$.
  $$\begin{aligned}\varphi(2) \le \varphi(u_n) \le \varphi(1) &\Leftrightarrow 1{,}66 \le u_{n+1} \le 2\\ &\Leftrightarrow 1 \le 1{,}66 \le u_{n+1} \le 2\\ &\Leftrightarrow 1 \le u_{n+1} \le 2 \Rightarrow u_{n+1} \in [1\,;2].\end{aligned}$$
- $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \le u_n \le 2$

b. Prouvons que , pour tout nombre réel x de $[\ 1\,;2]$ on a : $\left|\varphi'(x)\right| \le \dfrac{1}{2}$

on sait que $\forall x \in [\ 1\ ; 2]$; $\varphi'(x) = -\dfrac{1}{2x}$ et on a :

$x \in [1,2] \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 2 \leq 2x \leq 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{2x} \leq \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \varphi'(x) \leq -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \varphi'(x) \leq -\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow |\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

c. Déduisons-en que , pour tout entier n on a : $|u_{n+1} - \ell| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \ell|$

On sait que : $u_n \in [1\ ; 2]$, $\ell \in [1\ ; 2]$ et $|\varphi'(x)| \leq \dfrac{1}{2}$

En utilisant l'inégalité des accroissements finis à un intervalle de bornes ℓ *et* u_n, on a :

$|\varphi(u_n) - \varphi(\ell)| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \ell| \Leftrightarrow |u_{n+1} - \ell| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \ell|$.

$\left(\text{car } u_{n+1} = \varphi(u_n) \text{ et } \varphi(\ell) = \ell\right)$

d. Montrons que la suite u converge vers ℓ.

On sait que :

pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|u_{k+1} - \ell| \leq \dfrac{1}{2}|u_k - \ell|$:

Pour $k = 0$ $\quad |u_1 - \ell| \leq \dfrac{1}{2}|u_0 - \ell|$

Pour $k = 1$ $\quad |u_2 - \ell| \leq \dfrac{1}{2}|u_1 - \ell|$

pour $k = 2$ $\quad |u_3 - \ell| \leq \dfrac{1}{2}|u_2 - \ell|$

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Pour $k = n-2$ $\quad |u_{n-1} - \ell| \leq \dfrac{1}{2}|u_{n-2} - \ell|$

Pour $k = n-1$ $\quad |u_n - \ell| \leq \dfrac{1}{2}|u_{n-1} - \ell|$

En effectuant le produit membre à membre et en simplifiant , on obtient

$$|u_n - \ell| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0 - \ell|$$

$1 \leq \ell \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq -\ell \leq -1 \Leftrightarrow -1 \leq u_0 - \ell \leq 0$

$0 \le \left|u_0 - \ell\right| \le 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|u_0 - \ell\right| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\left|u_n - \ell\right| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n \left|u_0 - \ell\right| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\left|u_n - \ell\right| \le \frac{1}{2^n}$ *et* $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$

Ce qui prouve que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$. Donc u converge vers ℓ.

e. Déterminons un entier n_0 tel que u_{n_0} soit une valeur approchée à 10^{-2} près de ℓ. et donnons un encadrement de u_{n_0} d'amplitude 10^{-2}

$\left|u_n - \ell\right| \le \frac{1}{2^n} \le 10^{-2} \Rightarrow \frac{1}{2^n} \le 10^{-2} \Leftrightarrow 2^n \ge 10^2$

$\Leftrightarrow \log 2^n \ge \log 10^2$

$\Leftrightarrow n\log 2 \ge 2 \Leftrightarrow n \ge \frac{2}{\log 2}$

$\Leftrightarrow n \ge 6{,}64$

Il suffit donc de prendre $n_0 = 7$ et $u_{n_0} = u_7$ est donc une valeur approchée à 10^{-2} près de ℓ.

A l'aide d'une calculatrice , on calcule $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 1{,}6534$, $u_4 = 1{,}1785$, $u_5 = 1{,}7205$, $u_6 = 1{,}7286$ et $u_7 = 1{,}7263$. On trouve alors un encadrement de u_7 d'amplitude 10^{-2}.

$1{,}72 \le u_7 \le 1{,}73$.

C. La fonction g est définie sur $[0\,;1]$ par : $\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln x \quad \text{pour } 0 < x \le 1 \end{cases}$

a. Étudions la dérivabilité de g en 0.

$\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(-\frac{7}{8}x + 1 - \frac{1}{4}x\ln x\right) = 1 \in \mathbb{R}$

g est dérivable en 0 et son nombre dérivé est $g'(0) = 1$

b. Pour $x \ne 0$ $g'(x) = -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{4}\left(2x\ln x + \frac{x^2}{x}\right) = -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x\ln x - \frac{1}{4}$

$g'(x) = -2x + 1 - \frac{1}{2}x\ln x = x\left(-2 + \frac{1}{x} - -\frac{1}{2}\ln x\right) = x\left(-2 + \frac{1}{x} - +\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

$g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $0 < x \le 1$.

c. Déduisons le signe de $g'(x)$ lorsque x décrit $]0\,;1]$.

$\forall\, x \in]0\,;1]$ $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$. $g'(x)$ a le même signe que $f\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x \in]0\,;1]$.

Pour $l \in [1\ ;2] \Longrightarrow \dfrac{1}{\ell} \in \left[\dfrac{1}{2}\ ;1\right]$

$g'\left(\dfrac{1}{\ell}\right) = \dfrac{1}{\ell} \times f(\ell) = 0.$

Pour $x \in \left]0;\ \dfrac{1}{\ell}\right] \Longrightarrow \dfrac{1}{x} \in [\ell;\ +\infty[\ \Longrightarrow f\left(\dfrac{1}{x}\right) \geq 0$ donc $g'(x) \geq 0$ et

pour $x \in \left[\dfrac{1}{\ell}\ ;1\right] \Longrightarrow \dfrac{1}{x} \in [1;\ \ell] \Longrightarrow f\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 0$ donc $g'(x) \leq 0$

Dressons le tableau de variation de la fonction g.

x	0		$\dfrac{1}{\ell}$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g\left(\dfrac{1}{\ell}\right)$	$\searrow$	$1/8$

D. L'objectif est le tracé de la courbe représentative (C) de la fonction g dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O\ ;\vec{i}\ ,\vec{j}\right)$, unité graphique 10cm.

1. **a.** Montrons qu'une équation de la tangente (d) à la courbe (C) de g en son point d'abscisse nulle est $y = x$. : $g'(0) = 1$

(d) : $y = g'(0)(x-0) + g(0)$

$y = 1(x-0) + 0$

(d) : $y = x$

b. Déterminons les coordonnées des points d'intersection de la courbe (C) et de la droite (d)

$\forall x \in [0\ ;1]$, posons $g(x) = x$ avec $g(0) = 0$

$g(x) = x \Leftrightarrow -\dfrac{7}{8}x^2 + x - \dfrac{1}{4}x^2 \ln x = x$

$\Leftrightarrow -\dfrac{7}{8}x^2 - \dfrac{1}{4}x^2 \ln x = 0.$

$\Leftrightarrow x^2\left(\dfrac{7}{8} + \dfrac{1}{4}\ln x\right) = 0$

$x = 0$ ou $\ln x = -\dfrac{7}{2} \Longrightarrow x = e^{-\frac{7}{2}}$

$(C) \cap (d) = \{O(0\ ;0)\ ;\ I(e^{-7/2}\ ;e^{-7/2})\}$

c. Étudions la position relative de (C)) et de (d).

Signe de $\left(g(x)-y\right)$ pour tout $x\in[0\,;1]$.

$$g(x)-y=-\frac{7}{8}x^2-\frac{1}{4}x^2\ln x=-\frac{x^2}{4}\left(\frac{7}{2}+\ln x\right)$$

Tableau de signe de $\left(g(x)-y\right)$

x	0		$e^{\frac{-7}{2}}$		1
$g(x)-y$		$+$	0	$-$	

Pour $x\in\left]0\,;\,e^{-\frac{7}{2}}\right[$ (C) est au dessus de (d)

Pour $x\in\left]e^{-\frac{7}{2}}\,;\,1\right[$ (C) est en dessous de (d)

Pour $x\in\left\{0;\,e^{-\frac{7}{2}}\right\}$ (C) *et* (d) se coupent

d. Soit α la fonction définie sur $\left[0\,;\,e^{-\frac{7}{2}}\right]$ par $\alpha(x)=g(x)-x$

Étudions le sens de variations de la fonction α et déduisons que, pour tout réel x de l'intervalle $\left[0\,;\,e^{-\frac{7}{2}}\right]$ on a : $0\le\alpha(x)\le 5.10^{-5}$

Sachant que l'épaisseur d'un trait de crayon est de l'ordre du dixième de millimètre, est-il possible de distinguer, sur l'intervalle $\left[0\,;\,e^{-\frac{7}{2}}\right]$ la courbe (C) de la droite (d)?

Pour $x\in\left[0\,;\,e^{-\frac{7}{2}}\right]$, $\alpha(x)=g(x)-x$

$$=-\frac{7}{8}x^2-\frac{1}{4}x^2\ln x \text{ et } \alpha(0)=0$$

$$\alpha'(x)=-\frac{7}{4}x-\frac{1}{4}(2x\ln x+x)$$

$$=-\frac{7}{4}x-\frac{1}{2}x\ln x-\frac{1}{4}x$$

$$=-2x-\frac{1}{2}x\ln x$$

$\alpha'(x)=\ -x\left(2+\frac{1}{2}\ln x\right)$. $\alpha'(x)=0\Leftrightarrow\left(x=0 \text{ } ou \text{ } x=e^{-4}\right)$

x	0		e^{-4}		$e^{-\frac{7}{2}}$
$g(x)-y$	‖	$+$	0	$-$	

Pour $x\in\left[0,\,e^{-4}\right]$ α est croissante.

Pour $x\in\left[e^{-4};\,e^{-\frac{7}{2}}\right]$ α est décroissante.

α admet un maximum en $x = e^{-4}$ et $\alpha\left(e^{-4}\right) = 0{,}0000419 \leq 0{,}00005 = 5.10^{-5}$.

Donc : $\forall x \in \left[0, e^{-\frac{7}{2}}\right]$: $0 \leq \alpha(x) \leq 5.10^{-5}$.

L'épaisseur d'un trait de crayon étant $\frac{1}{10}$mm , il n'est pas possible de distinguer sur l'intervalle $\left[0, e^{-\frac{7}{2}}\right]$ la courbe (C) et la droite (d) car $\alpha(x) \leq 5.10^{-5}$mm,l'épaisseur $e = 10^{-1}$mm . $e > \alpha(x)$

2. Soit (Γ) la courbe représentative de la fonction β définie sur $[0\,;1]$ par :

$\beta(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x$

a. Montrons que la droite (d) est la tangente à la courbe (Γ) en son point d'abscisse nulle

$\beta'(x) = -\frac{7}{4}x + 1$; $\beta'(0) = 1$ et $\beta(0) = 0$. Donc l'équation de la tangente à (Γ) en son point d'abscisse nulle est (d): $y = x$.

b. Étudions la position relative de (C) et de (Γ).

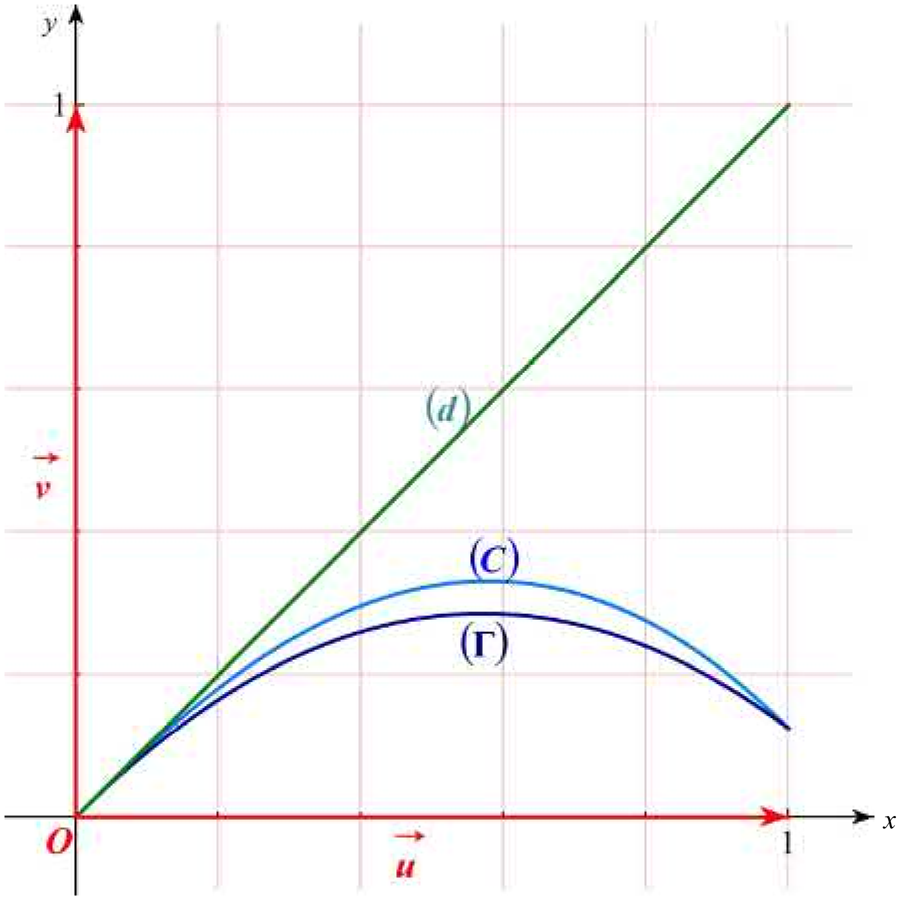
Pour tout $x \in [0; 1]$: $g(x) - \beta(x) = -\frac{1}{4}x^2 \ln x$, or $\forall x \in]0; 1]$ $\ln x \leq 0$; donc pour tout $x \in [0; 1]$; $g(x) - \beta(x) = -\frac{1}{4}x^2 \ln x \geq 0$. Ce qui prouve que (C) est au dessus de (Γ).

c. Traçons, sur un même graphique (C), (Γ) et (d).

Tableau de variable de β

$\beta'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{7} \times \beta\left(\frac{4}{7}\right) = -\frac{7}{8}\left(\frac{16}{49}\right) + \frac{4}{7} = \frac{2}{7}$, $\beta(1) = \frac{1}{8}$

x	0		$\frac{4}{7}$		1
$\beta'(x)$		$+$	0	$-$	
$\beta(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{7}$	$\searrow$	$1/8$


y
1
(d)
(C)
(Γ)
O
x
1