RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Session principale	2024
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**	
	Durée : **4h**	Coefficient de l'épreuve : **4**	

N° d'inscription | | | | | | |

Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.
Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.

Exercice 1 (4.5 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): 2\sqrt{3}\,z^2-\left(7-i\sqrt{3}\right)\,z+2\sqrt{3}-2i=0$.

1) a) Vérifier que $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ est une solution de (E).

   b) Déterminer l'autre solution sous forme exponentielle.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

   Dans **la figure 1** de l'annexe ci-jointe, ζ est le cercle de centre O et de rayon 1 et P est un point de ζ d'affixe $z_P=e^{i\theta}$, où θ est un réel de $]-\pi,\pi[\setminus\{0\}$.

   a) Construire le point Q d'affixe $z_Q=e^{i(\theta-\frac{\pi}{6})}$.

   b) La tangente à ζ en Q coupe la droite (OP) au point M d'affixe z_M.

   Montrer que $z_M=\dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{i\theta}$.

   c) Construire le point N d'affixe $z_N=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

   d) Vérifier que les points M et N sont distincts.

3) a) Montrer que $z_M-z_N=\dfrac{4}{\sqrt{3}}\sin(\dfrac{\theta}{2})\,e^{i(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{2})}$.

   b) Montrer que $z_M-z_Q=\dfrac{1}{\sqrt{3}}e^{i(\theta+\frac{\pi}{3})}$.

   c) Pour quelle valeur de θ, le triangle MNQ est-il rectangle en M ?

Exercice 2 (5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la **figure 2** de l'annexe ci-jointe, le triangle ABC est isocèle en A tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{5\pi}{6} [2\pi]$, J est le milieu du segment [AC], I est le point tel que $\overrightarrow{AC} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{AI}$ et K est le point tel que le triangle AJK est isocèle en A et $(\widehat{\overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}}) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$.

Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{5\pi}{6}$, h l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et S la similitude directe telle que $S(B) = I$ et $S(I) = K$.

1) Justifier que $h \circ R = R \circ h$.

2) a) Déterminer $h \circ R(B)$.

   b) Vérifier que $h(I) = J$.

   c) Montrer que $S = h \circ R$.

   d) En déduire une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IK}})$.

3) Soit $E = S(K)$.

   a) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KE}}) \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi]$.

   b) Déterminer $S \circ S \circ S(B)$. En déduire que les droites (AB) et (AE) sont perpendiculaires.

   c) Construire le point E.

4) Soit g la similitude indirecte telle que $g(B) = I$ et $g(I) = K$. On note Ω le centre de g.

   a) Déterminer le rapport de g.

   b) Déterminer $g \circ g(B)$. En déduire que Ω est le symétrique de B par rapport à K.

5) Soit F le milieu du segment $[I\Omega]$.

   a) Montrer que $F = g(K)$.

   b) Justifier que $(\widehat{\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KF}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

   c) En déduire que le triangle KEF est équilatéral.

Exercice 3 (7 points)

A/ Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par $f(x)=x-(x-1)\ln(x+1)$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement.

   b) Montrer que la droite d'équation $x=-1$ est une asymptote à (C).

2) Montrer que pour tout $x\in\,]-1,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{2}{x+1}-\ln(x+1)$.

3) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction f'.

x	-1		$+\infty$
f'	|| $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

   a) Montrer que l'équation $f'(x)=0$ admet dans l'intervalle $]-1,+\infty[$ une unique solution α telle que $1.3<\alpha<1.4$.

   b) En déduire le signe de $f'(x)$.

   c) Dresser le tableau de variation de f. (On précisera $f(0)$ et $f(1)$).

4) Tracer la courbe (C), (on prendra $\alpha=1.35$).

5) a) Montrer que pour tout $x>-1$, $\displaystyle\int_0^x (t-1)\ln(t+1)\,dt=\frac{1}{2}(x^2-2x-3)\ln(x+1)+\frac{1}{4}(6x-x^2)$.

   b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x=0$, $x=1$ et $y=0$.

B/ Pour tout entier $n\geq 2$, on pose $a_n=\displaystyle\int_0^1 (f(x))^n\,dx$.

1) a) Justifier que pour tout $x\in\,]-1,1]$, $f'(x)\geq 1-\ln 2$.

   b) En déduire que pour tout entier $n\geq 2$, $f\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\leq 1-\dfrac{1-\ln 2}{\sqrt{n}}$.

2) a) Montrer que pour tout entier $n\geq 2$, $\displaystyle\int_0^{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}(f(x))^n\,dx\leq\left(1-\frac{1-\ln 2}{\sqrt{n}}\right)^n$.

   b) Montrer que pour tout entier $n\geq 2$, $0\leq a_n\leq\left(1-\dfrac{1-\ln 2}{\sqrt{n}}\right)^n+\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

   c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln\left(1-\dfrac{1-\ln 2}{\sqrt{n}}\right)=-\infty$.

   d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

Exercice 4 (3.5 points)

1) Soit dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $5u - 53v = 24$.

   a) Vérifier que $(26,2)$ est une solution de (E).

   b) Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E).

2) Soit $x \in \mathbb{Z}$.

   a) Déterminer les restes modulo 5 de $x^2 - x$.

   b) Montrer que $(x-27)^2 \equiv x^2 - x - 13 \pmod{53}$.

3) On considère dans $\mathbb{Z}$ le système (S): $\begin{cases} x^2 - x \equiv 1 \pmod{5} \\ x^2 - x \equiv 13 \pmod{53}. \end{cases}$

   a) Montrer que x est une solution de (S) si et seulement si, il existe $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

   $$\begin{cases} x = 3 + 5u \\ x = 27 + 53v. \end{cases}$$

   b) Déterminer les solutions du système (S).

4) Déterminer dans $\mathbb{Z}$, les solutions de l'équation $x^2 - x - 66 \equiv 0 \pmod{265}$.

Section : . . . . N° d'inscription : . . . . Série : . . . .

Nom et Prénom : . . . .

Date et lieu de naissance : . . . .

Signatures des surveillants

. . . .

. . . .

Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques
Session principale (2024)
Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

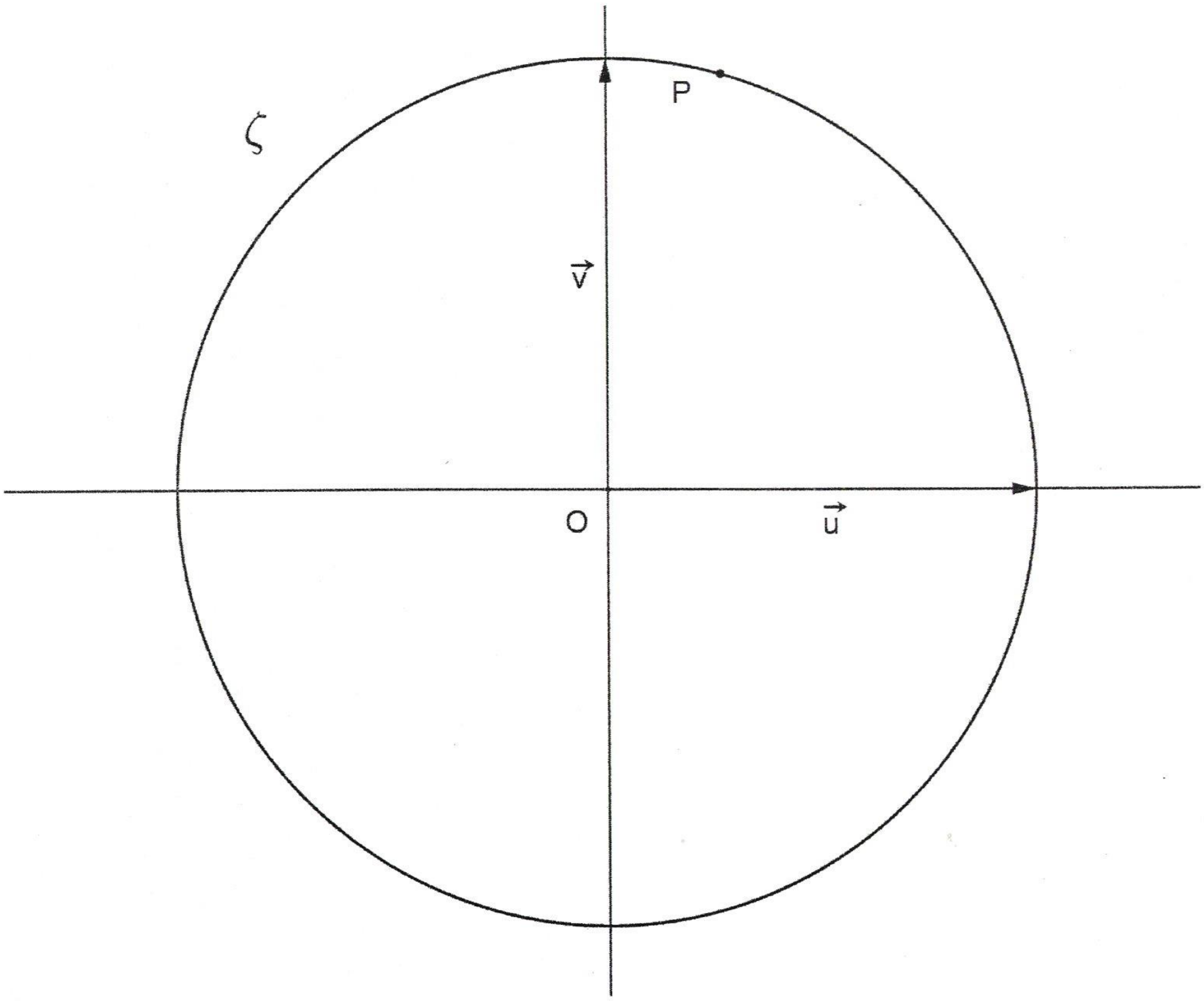

Figure 2